Gibt es Grenzen des mathematischen Wissens?

PD DR. JOACHIM BROMAND

Institut für Philosophie
Universität Bonn
Am Hof 1
D-53113 Bonn
bromand@uni-bonn.de

1. Einleitung

Im Vortrag geht es um die Anwendung von Ergebnissen der algorithmischen Informationstheorie auf erkenntnistheoretische Fragen. Dabei werden die Resultate Gregory Chaitins und deren Konsequenzen für die Erkenntnistheorie im Mittelpunkt stehen. Chaitin präzisierte wie auch Kolmogorov die Begriffe von *Komplexität* und *Zufälligkeit*, wodurch beide die algorithmische Informationstheorie begründeten. Chaitin bewies zudem limitative Theoreme, die vergleichbar mit Gödels Resultaten die Unvollständigkeit bestimmter formaler Systeme zeigen. Äußerst kontrovers werden die philosophischen Konsequenzen diskutiert, die Chaitin aus seinen Ergebnissen zieht. Zu diesen Schlussfolgerungen zählen etwa die Thesen, dass es Zufälligkeiten bereits in der Arithmetik gibt, dass Mathematik eine quasi-empirische Wissenschaft ist und dass unser mathematisches Wissen notwendigerweise begrenzt ist. Im Vortrag soll es um die letzte dieser Behauptungen gehen, mit der Chaitin Hilberts berühmtem Diktum widerspricht, dem zufolge es „in der Mathematik […] kein Ignorabimus" gibt.

2. Chaitins Unvollständigkeitstheoreme

Chaitins Unvollständigkeitstheoreme bauen auf die folgende Charakterisierung des Komplexitätsbegriffes auf, die auf Kolmogorov und Chaitin zurückgeht:

> Die *Komplexität* einer Zeichenfolge kann gemessen werden anhand der Länge des kürzesten Programms, das die Folge erzeugt.

Eine Folge ist also umso komplexer, je schwieriger die Folge komprimiert werden kann. Die Komplexität einer Folge im Sinne von Kolmogorov und Chaitin bemisst sich demnach am Grad ihrer Komprimierbarkeit. Dieser Begriff von Komplexität wird häufig als *descriptional*, *information-theoretic* oder auch *program-size complexity* bezeichnet, um ihn von einem weiteren Komplexitätsbegriff, der sog. *computational complexity* zu unterscheiden. Bei der Bemessung der *computational complexity* spielen im Gegensatz zu Kolmogorovs und Chaitins Begriff die Mengen der Ressourcen wie etwa der Rechenzeit eine entscheidende Rolle.

Die Komplexität einer Folge im Sinne der obigen Definition ist natürlich abhängig von einer Reihe von Faktoren, so etwa von dem zugrunde gelegten Typ von Computer, der die fraglichen Programme ausführen soll, sowie (dem Alphabet) der Sprache, in der die Programme verfasst sind usw. In der Regel—wie auch im Folgenden—legt man sich auf eine Art von (universeller) Turing-Maschine und eine Sprache fest. Ein Extremfall von Komplexität tritt bei Folgen auf, die nicht komprimierbar sind. In solchen Fällen besteht das kürzeste Programm, das die fragliche Folge erzeugt, in einem Druckbefehl gefolgt von dem Zitat der gesamten Folge, womit das Programm mindestens so lang ist wie die Folge selbst. In derartigen Fällen spricht Chaitin von *zufälligen* Folgen:[1]

> Eine endliche Folge ist *zufällig* genau dann, wenn sie nicht deutlich komprimierbar ist bzw. wenn das kürzeste die Folge erzeugende Programm annäherungsweise von derselben Länge ist wie die Folge selbst.

Dem dürfte die Überlegung zugrunde liegen, dass in einer zufälligen Folge keine Regelmäßigkeiten oder wiederkehrenden Muster vorzufinden sind, mit deren Hilfe die Folge in komprimierterer Form beschrieben werden könnte. Die Intuition, dass eine Folge zufällig ist, wenn sie nicht wesentlich komprimiert werden kann, lässt sich auch auf unendliche Folgen übertragen:

> Eine *un*endliche Folge ist *zufällig* genau dann, wenn für alle ihre Anfangssegmente gilt, dass sie nicht deutlich komprimierbar sind, bzw. wenn die Abweichung zwischen der Länge des Anfangssegments und dem kürzesten Programm, welches das Segment erzeugt, nicht beliebig groß werden kann.[2]

Insbesondere ist eine unendliche Folge damit zufällig, wenn jedes ihrer Anfangssegmente eine zufällige (endliche) Folge ist. Zum Verhältnis von zufälligen und nicht-zufälligen Folgen sei hier noch angemerkt, dass die große Mehrheit der Folgen zufällig ist: Im Falle unendlicher Folgen ergibt sich dies aus einer einfachen Abschätzung: Aufgrund der Abzählbarkeit üblicher Programmiersprachen lassen sich nur abzählbar viele Folgen in Form eines Programms komprimieren. Demgegenüber ist die Menge aller unendlichen Folgen überabzählbar, so dass es überabzählbar viele zufällige Folgen mehr geben muss als nicht-zufällige. Auch im endlichen Fall sind die zufälligen Folgen klar in der Mehrheit: Nehmen wir an, dass zwei Folgen F_1 und F_2 annäherungsweise von derselben Länge sind genau dann, wenn $\,||F_1| - |F_2|\,| < 20$ (d.h., wenn der Betrag der Differenz der Längen beider Folgen kleiner als 20 ist). In diesem Fall kann abgeschätzt werden, dass das Verhältnis der nicht-zufälligen zu allen Folgen kleiner als eins zu einer Million beträgt, so dass höchstens eine Folge unter einer Million nicht zufällig ist.[3] Aufgrund dieser Mehrheitsverhältnisse ist zu erwarten, dass es nicht schwierig sein dürfte, beliebig viele Beispiele von zufälligen Folgen anzugeben. Ein erstes Unvollständigkeitsresultat Chaitins zeigt jedoch, dass dem nicht so ist:

> **Chaitins erstes Unvollständigkeitstheorem.** *Für jede formale Theorie* T*, die nur wahre Sätze der Form „die Komplexität von s ist größer als n" beweist, gilt:*
> *Es gibt eine von der jeweiligen Theorie* T *abhängige Konstante m, so dass* T *Sätze der Form $H(s) > n$ nur dann beweist, wenn $n < m$.*

Da nur endlich viele Folgen von sprachlichen Ausdrücken (bzw. Programmen) beschrieben werden können, die aus weniger als m-vielen Zeichen bestehen, folgt aus dem obigen Theorem

1 Es gibt alternative Definitionsversuche von Zufälligkeit im obigen Sinne. Chaitin (1987), Kapitel 7, bespricht einige davon, darunter den Ansatz von Per Martin-Löf, und zeigt deren Äquivalenz.

2 Formeller ausgedrückt besagt die Definition, dass eine unendliche Folge F zufällig ist genau dann, wenn es eine Konstante c gibt, so dass für alle Anfangssegmente F_n der Länge n von F gilt, dass die Komplexität von F_n — im Folgenden kurz: $H(F_n)$ — nicht um c kleiner ist als n bzw.: $\exists c\, \forall n\, H(F_n) \geq (n - c)$.

3 Sei w eine Folge mit der Länge $|w| = i > 20$. Ist w nicht zufällig, gibt es nach den obigen Festlegungen ein kürzestes Programm w^*, das w erzeugt und dessen Länge kleiner ist als $i - 20$. Die Anzahl aller Worte mit einer kleineren Länge als $i - 20$ ist $2^{i-20} - 2$ (da es 2^1 Worte von der Länge 1, 2^2 Worte von der Länge 2 und im Allgemeinen 2^i Worte von der Länge i gibt und $2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{i-21} = 2^{i-20} - 2$). Da es 2^i Worte von der Länge i gibt, ist also das Verhältnis der Worte mit einer Länge kleiner als $i - 20$ zu den Worten von der Länge i gleich $2^{i-20} - 2$ zu 2^i, und dies wiederum ist kleiner als eins zu einer Million.

unter anderem, dass wir auf der Grundlage einer gegebenen Theorie T immer nur von endlich vielen Folgen zeigen können, dass sie zufällig sind. Insbesondere problematisch ist es, ein Beispiel einer unendlich langen zufälligen Folge anzugeben, was in deren Nicht-Komprimierbarkeit in ein endliches Format begründet ist. Insbesondere ist so nicht zu erwarten, dass ein Algorithmus angegeben werden kann, der jedes Folgenglied einer solchen Folge erzeugt. Chaitin gelang es dennoch, eine zufällige Folge Ω anzugeben, ausgehend von der er dann sein zweites Unvollständigkeitstheorem bewies:

Chaitin bezeichnet die zu definierende zufällige Folge als „Ω", und seine Grundidee bei der Definition ist, unter „Ω" die Haltewahrscheinlichkeit eines universellen Computers zu verstehen. Im Folgenden wird ein universeller Computer U zugrunde gelegt, der nur binäre präfixfreie Programme akzeptiert (eine (Programmier-)Sprache L wird *präfixfrei* genannt gdw. kein Wort von L ein Präfix eines anderen Worts von L ist). „$|p|$" bezeichne die Länge eines Programms p. Im Rahmen der zugrunde gelegten binären Sprache gibt es 2^n-viele Folgen der Länge n (die nur aus den Folgengliedern „0" und „1" bestehen). Unter diesen Folgen befinden sich auch alle Programme mit der Länge n. Zählt man die Anzahl aller *haltenden* Programme und dividiert diese durch 2^n, ergibt sich die *Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebig herausgegriffene Folge der Länge n ein haltendes Programm darstellt*; diese Wahrscheinlichkeit soll im Folgenden als $P(n)$ bezeichnet werden. Es gilt demnach

$$P(n) \;=\; \sum_{\substack{|p|=n, \\ U(p)\,\textit{hält}}} 2^{-|p|}$$

Im Folgenden wird die Wahrscheinlichkeit betrachtet, dass eine beliebige Folge der Länge n ein Anfangssegment der Länge m enthält $(1 \leq m \leq n)$, das ein haltendes Programm darstellt. Für ein Anfangssegment mit der Länge m besteht dabei die Wahrscheinlichkeit $P(m)$, dass es sich bei dem Segment um ein haltendes Programm handelt. Da eine präfixfreie Sprache zugrunde gelegt wird, kann es höchstens ein Anfangssegment einer solchen Folge geben, das ein (haltendes) Programm bildet. Somit schließt etwa der Fall, dass das Anfangssegment mit der Länge m ein haltendes Programm bildet, alle anderen Anfangssegmente mit anderen Längen als Fälle von haltenden Programmen aus. Daher besteht die gesuchte Wahrscheinlichkeit Ω_n einfach in der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einander ausschließenden Alternativen:

$$\Omega_n \;=\; P(1) + P(2) + \ldots + P(n) \;=\; \sum_{\substack{|p|\leq n, \\ U(p)\,\textit{hält}}} 2^{-|p|}$$

Betrachtet man nun beliebig lange Folgen (und nicht nur solche mit einer vorgegebenen maximalen Länge n), ergibt sich die so genannte *Haltewahrscheinlichkeit* von U:

$$\Omega \;=\; \sum_{U(p)\,\textit{hält}} 2^{-|p|}$$

Dem liegt die Intuition zugrunde, dass Ω die Wahrscheinlichkeit ist, dass U hält, wenn ihr (beliebig langes) Programm p durch eine Folge von Münzwürfen generiert wurde. Ω verschlüsselt dabei in sehr kompakter Form die Lösung von Turings Halteproblem.[4] So kann man etwa beweisen, dass mit Hilfe der ersten n-vielen Bits von Ω das Halteproblem für alle Programme ge-

4 Das *Halteproblem* besteht dabei in der Frage, ob es eine Turing-Maschine gibt, welche die Funktion $h(m, n)$ berechnet, die den Wert 1 annimmt, falls die Turing-Maschine mit der Nummer m irgendwann hält, falls sie mit dem Wert n gestartet wurde. Alan Turing bewies 1936, dass das Halteproblem unlösbar ist (siehe Turing 1936).

löst werden kann, deren Länge n Bits nicht überschreitet. Dies ist insofern von Interesse, als damit auch Programme erfasst wären, die nach Gegenbeispielen für berühmte mathematische Behauptungen suchen wie die Goldbachsche Vermutung oder die Hypothese Riemanns. Zudem wäre es mit Hilfe der ersten n-vielen Bits von Ω möglich, den Status vieler offener Fragen hinsichtlich formaler Systeme zu klären. Ist S ein axiomatisches System, kann zu jeder wohlgeformten Formel α eine Turing-Maschine konzipiert werden, die alle auf der Grundlage von S geführten Beweise überprüft und hält, sobald sie einen Beweis für α gefunden hat. α ist also beweisbar, wenn die Turing-Maschine für α hält, widerlegbar, wenn die entsprechende Turing-Maschine für $\neg\alpha$ hält, und unentscheidbar sonst (wenn also keine der beiden Maschinen hält). Da mit Kenntnis der ersten n-vielen Bits von Ω das Halteproblem für alle Programme gelöst werden kann, deren Länge n Bits nicht überschreitet, kann für jedes axiomatische System S und jeden Satz α mit hinreichend großem n geklärt werden, ob α beweisbar, widerlegbar oder unentscheidbar in S ist.

Für die Belange der vorliegenden Abhandlung ist hinsichtlich Ω von zentralem Interesse, dass die binäre Darstellung dieser Zahl eine nicht komprimierbare, im obigen Sinne also eine zufällige Folge und sogar eine unendliche zufällige Folge bildet (vgl. etwa Li & Vitányi 1997, S. 218).[5] Ausgehend von dieser Tatsache kann das besagte zweite Unvollständigkeitstheorem Chaitins bewiesen werden, dessen philosophische Konsequenzen im Folgenden erörtert werden (und als Ω-*Theorem* bezeichnet werden soll). Was hinsichtlich Ω gezeigt werden kann, ist, dass Ω eine reelle Zahl ist, so dass $0 < \Omega < 1$ gilt. Chaitins Ω-Theorem zeigt jedoch auf, dass die Anzahl der Bits von Ω, die wir im Rahmen einer Theorie bestimmen können, endlich ist (siehe etwa Chaitin 1987, S. 150–151, oder Calude 1994, S. 195–196):

> **Ω-Theorem.** *Jede rekursiv axiomatisierbare formale Theorie erlaubt lediglich endlich viele (unzusammenhängende) Bits von Ω zu bestimmen.*

Anders formuliert besagt das Ω-Theorem:

> *Sei* T *eine formale Theorie, die eine rekursiv aufzählbare Menge von Theoremen erzeugt. Falls* T *nur Theoreme der Form*
>
> *„die n-te Dezimalstelle von Ω ist m"*
>
> *enthält, die auch wahr sind, dann erlaubt* T *höchstens die Positionen und Werte endlich vieler (verstreuter) Dezimalstellen von Ω zu bestimmen.*

Ist also n hinreichend groß, kann ausgehend von der fraglichen Theorie T kein wahrer Satz der Form „*die n-te Dezimalstelle von Ω ist m*" bewiesen werden. Aufgrund der im Ω-Theorem vorausgesetzten Anforderung an T, nur wahre Sätze mit dieser Form zu beweisen, sind auch die Negationen dieser Sätze nicht beweisbar in T. Unendlich viele Sätze von dieser Form werden im Rahmen von T also unentscheidbar, und T selbst wird somit unvollständig sein.

5 Nach der Definition unendlich langer zufälliger Folgen ist dazu zu zeigen, dass es eine Konstante c gibt, so dass für alle Anfangssegmente Ω_n der Länge n von Ω gilt, dass $H(\Omega_n) \geq (n - c)$. Mit Hilfe von Ω_n kann nun bestimmt werden, welche Programme mit einer Länge kleiner oder gleich n schließlich halten. Somit kann zu jedem Ω_n die kleinste Zahl bestimmt werden—im Folgenden $\phi(\Omega_n)$—, die von keinem dieser Programme ausgegeben wird. Somit gilt $H(\phi(\Omega_n)) > n$. Die Funktion ϕ kann nun von einem Programm berechnet werden, das für jedes n ausgehend von Ω_n die Zahl $\phi(\Omega_n)$ berechnet; das Programm besteht dabei in einem konstanten Teil von c Bits und verfügt über die Information von Ω_n, die bestenfalls durch $H(\Omega_n)$-viele Bits verschlüsselt werden kann. Dann gilt aber, dass $H(\Omega_n) + c \geq H(\phi(\Omega_n))$. Da nach Obigem auch $H(\phi(\Omega_n)) > n$ gilt, folgt $H(\Omega_n) + c > n$ und somit $H(\Omega_n) > n - c$, so dass es sich bei Ω um eine unendlich lange zufällige Folge handelt. Vgl. auch Resag (200?), Kapitel 3.

Ein Argument für die Unerforschlichkeit von Ω will diese auf die Zufälligkeit von Ω zurückführen (dabei wird die Zufälligkeit einer Folge mit deren Nicht-Komprimierbarkeit identifiziert) (Chaitin 1987, S. 164): „Ω is about as random, patternless, unpredictable and incomprehensible as possible; the pattern of its bit sequence defies understanding." Allerdings ist die Rede vom Zufall in der Mathematik problematisch und soll deswegen an dieser Stelle nicht weiter verfolgt werden.[6] Tatsächlich scheint die Nicht-Komprimierbarkeit von Ω mit einer notwendigen Bedingung des Wissensbegriffs inkompatibel zu sein. Für Wissen ist es bekanntlich notwendig, in einer gut *begründeten* Überzeugung zu bestehen und d.h. in der Mathematik soviel wie *beweisbar* zu sein. Nun zeigt Chaitins zweites Theorem aber, dass in allen rekursiv axiomatisierbaren Theorien nur endlich viele Stellen von Ω bestimmt werden können. Dann wäre es uns aber unmöglich um die Werte unendlich vieler Stellen von Ω zu wissen, unabhängig davon, welche (rekursiv axiomatisierbare) Theorie wir zugrunde legen. Im Folgenden soll diskutiert werden, ob dieses Argument für die Begrenztheit unseres mathematischen Wissens Aussicht auf Erfolg verspricht.

Alle Argumentationen, welche die Begrenztheit unseres Wissens erweisen sollen, haben zumindest zwei Bedenken auszuräumen. Zum einen ist zu zeigen, dass die fraglichen Grenzen nicht doch einmal aufgrund unvorhersehbarer wissenschaftlicher Weiterentwicklungen überwunden werden können. Dies soll im Folgenden als *Problem der Unvorhersagbarkeit des wissenschaftlichen Fortschritts* bezeichnet werden. Zum anderen ist plausibel zu machen, dass es sich tatsächlich um eine unerkennbare *Tatsache* handelt und nicht eine antirealistische Interpretation vorzuziehen ist, der zufolge es nicht um eine Tatsachenfrage geht und es so gar keine Tatsache gibt, von der man Wissen erlangen könnte. Während dieses Realismusproblem, wie es im Folgenden bezeichnet werden soll, in Abschnitt 5 aufgegriffen wird, soll es zunächst um die Problematik der Unvorhersehbarkeit des wissenschaftlichen (in diesem Falle des mathematischen) Fortschritts gehen. Dabei sollen zwei Möglichkeiten wissenschaftlichen Fortschritts in der Mathematik erörtert werden. Die eine Form soll als *inhaltlicher Fortschritt* bezeichnet werden, die zweite als *methodologischer Fortschritt*. Mit methodologischem Fortschritt ist dabei eine Ausweitung der anerkannten Rechtfertigungsverfahren über die Methode des Beweises hinaus gemeint. Beim inhaltlichen Fortschritt geht es demgegenüber um die Erweiterung der anerkannten Grundsätze und somit um die Erweiterung unserer Möglichkeiten, eine mathematische Behauptung auf ‚klassische' Weise mit Hilfe eines Beweises zu rechtfertigen.

4. FORTSCHRITT IN DER MATHEMATIK UND SEINE ABSCHÄTZBARKEIT

4.1 Inhaltlicher Fortschritt

Ist es also möglich, dass unser Wissen um die Beschaffenheit von Ω durch weiteren inhaltlichen Fortschritt wesentlich bereichert wird? Zumindest ist dies möglich im Falle anderer unentscheidbarer Sätze. So können wir um den Wahrheitswert von unentscheidbaren Propositionen wissen, falls diese nur unentscheidbar in *einigen* formalen Systemen sind. Dies ist aus erkenntnistheoretischer Sicht nicht notwendigerweise problematisch. Insbesondere zeigt der Nachweis der Unentscheidbarkeit bestimmter Sätze nicht, dass es unmöglich ist, den Wahr-

6 Vgl. hierzu Bromand (200?), Kap. IV, § 5; Franzén (2005), S. 146; Raatikainen (2001), S. 995; van Lambalgen (1989), S. 1398.

heitswert der unentscheidbaren Sätze in Erfahrung zu bringen. Dies kann verdeutlicht werden durch den Vergleich mit dem erkenntnistheoretischen Status anderer unentscheidbarer Probleme bzw. Sätze wie etwa Gödels erstem Unvollständigkeitstheorem oder der durch Gödel und Cohen nachgewiesenen Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese CH im Rahmen von ZFC. Zum Nachweis der Unvollständigkeit der Arithmetik konstruiert Gödel einen Satz γ, der unentscheidbar in PA ist. Dennoch haben wir aufgrund von metatheoretischen Erwägungen anscheinend[7] gute Gründe, an die Wahrheit von γ zu glauben, da γ gerade besagt, dass γ in PA nicht nachweisbar ist, und wir zudem gute Gründe haben daran zu glauben, dass aus den Axiomen von PA nichts Falsches herleitbar ist. Demgegenüber stellt die Frage nach Wahrheit oder Falschheit von CH ein wesentlich gravierenderes Problem dar. CH ist unentscheidbar in ZFC und damit unentscheidbar relativ zur stärksten weitestgehend anerkannten und gegenwärtig zur Verfügung stehenden mathematischen Theorie. Auch helfen in diesem Fall nicht metatheoretische Erwägungen wie im Falle von Gödels Satz. Allerdings besteht die Möglichkeit, ZFC durch weitere Axiome zu ergänzen, so dass CH auf der Basis der somit erweiterten Theorie entscheidbar ist. Solche Erweiterungen einer Theorie um neue Axiome bzw. (im Falle von Gödels Satz) um metatheoretische Feststellungen stellen dabei bislang die einzigen kaum umstrittenen Möglichkeiten dar, den Wahrheitswert eines unentscheidbaren Satzes eruieren zu können. Problematisch im Falle von Ω ist demgegenüber nun, dass keine der beiden Methoden signifikant weiterhilft, die Beschaffenheit von Ω zu bestimmen. Insofern wirft das von Chaitin aufgezeigte Problem *in erkenntnistheoretischer Hinsicht* gravierendere Konsequenzen auf als die beiden anderen erwähnten unentscheidbaren Probleme. Da es nach Chaitins Ω-Theorem in *jeder* Theorie unendlich viele unentscheidbare Sätze geben wird, welche die Beschaffenheit von Ω betreffen, kann auch der Übergang zu einer umfassenderen (rekursiv axiomatisierbaren) Theorie nicht zur Lösung des Problems führen. Weder das Hinzuziehen metatheoretischer Überlegungen (wie im Falle von γ) noch das Hinzuziehen weiterer Axiome (wie eventuell im Fall von CH) helfen daher zur Bestimmung der Beschaffenheit von Ω deutlich weiter. Letztere stellt demnach ein Problem dar, das in *keiner* von uns überschaubaren Theorie (in der die Beweisrelation rekursiv ist) vollständig gelöst werden kann. Die Frage nach der Beschaffenheit von Ω scheint demnach von uns prinzipiell nicht beantwortet werden zu können—unabhängig davon, in welcher umfassenderen Theorie sich unsere fortschreitenden Bemühungen, unser mathematisches Wissen zu erweitern, auch niederschlagen mögen. In *jeder* überschaubaren Theorie wird es unendlich viele unentscheidbare Sätze geben, welche die Beschaffenheit von Ω betreffen. Somit scheint ein möglicher inhaltlicher Fortschritt in der Mathematik Chaitins erkenntnistheoretische Schlussfolgerung hinsichtlich der Begrenztheit unseres mathematischen Wissens nicht zu gefährden.

4.2 Methodologischer Fortschritt

Zu berücksichtigen ist aber, dass die obigen Überlegungen lediglich zeigen, dass wir über die genaue Beschaffenheit von Ω nichts in Erfahrung bringen können, sofern wir die *bislang gebräuchlichen* Methoden verwenden, um etwas über die Wahrheitswerte (unentscheidbarer) mathematischer Behauptungen zu erfahren (wie diejenigen, welche die Bits von Ω betreffen). Demgegenüber könnte für Chaitins Behauptung erst dann lückenlos argumentiert werden, wenn ausgeschlossen werden könnte, dass es (neben dem inhaltlichen Fortschreiten in Form

7 Der Schein könnte aber trügen; vgl. hierzu Field (1998b), Abschnitt 6.

des Hinzuziehens metatheoretischer Erwägungen oder weiterer Axiome) alternative, bislang unbekannte Methoden gibt, durch die wir bestimmte Überzeugungen begründen und somit eventuell in mathematisches Wissen überführen können. Um Chaitins erkenntnistheoretische Behauptung zu untermauern, müsste so die Möglichkeit eines methodologischen Fortschritts ausgeschlossen werden, in dessen Zuge weitere Rechtfertigungsstrategien neben dem Beweis als Begründung einer mathematischen Behauptung anerkannt würden. Augenblicklich werden insbesondere zwei Methoden als Anwärter auf die Positionen alternativer Rechtfertigungsverfahren (neben dem Beweis) gehandelt, nämlich einmal so genannte *quasi-empirische* bzw. *semi-rigorose* Methoden, die zum Teil experimenteller Natur sind. Zum anderen wird die Rechtfertigungskraft anschaulicher bzw. visueller Rechtfertigungsverfahren erörtert.[8] Die Frage nach solchen Rechtfertigungsmethoden und damit auch nach der Natur mathematischer Evidenz steht allerdings nicht im Zentrum der traditionellen Literatur zur Philosophie der Mathematik[9] und führt über diese hinaus: „Traditional issues are still with us and still important. […] But the real action today—the living philosophical issues for working mathematicians—cluster around visualization and experimentation." (Brown 1999, S. 192)

Auch wenn die große Mehrheit der Mathematiker den meisten quasi-empirischen sowie anschaulichen Methoden äußerst skeptisch gegenüberstehen dürfte, finden sich doch Stimmen, die sich für den Einsatz solcher Methoden aussprechen. So ist etwa Keith Devlin der Meinung, dass derartige Methoden Eingang in die Mathematik finden sollten:

> Proofs will almost certainly continue to occupy a supreme and central position in mathematics. At issue, surely, is whether the 'definition-proof'-paradigm continues to act as the *definition* of what constitutes mathematics. […] And this is really up to us. […] We control the meaning we, as a profession, assign to the word 'mathematics', and we can decide whether to include experimental mathematics, visual reasoning, and the like, as genuine 'mathematics'. Personally, I hope we do take a broad, inclusive view of what is acceptable for membership in, and acceptance by, the profession. (Devlin 1993, S. 1352)

Im Folgenden soll auf beide Methoden näher eingegangen werden. Dabei soll es zunächst um quasi-empirische Methoden und danach um die visuellen Verfahren gehen.

Im Rahmen der Diskussion um den Einsatz quasi-empirischer Methoden in der Mathematik stehen zumeinst wiederum zwei Vorgehensweisen im Vordergrund. Dabei handelt es sich zum einen um Beweisführungen wie die im Falle des Vierfarbensatzes, bei denen Computer eine unverzichtbare Rolle spielen. Zum anderen geht es um das induktive Akzeptieren allgemeiner Behauptungen aufgrund einer großen Zahl bestätigter Instanzen der besagten Behauptung. Die entsprechenden Instanzen können dabei auch durch Computer generiert sein, müssen es aber nicht, so dass der Einsatz von Computern im Rahmen dieser zweiten quasi-empirischen Methode keine wesentliche Rolle spielt (wenn er natürlich auch die Berechnung einer weitaus größeren Zahl von Instanzen ermöglicht). Beide quasi-empirischen Methoden

8 Die folgenden allgemeinen Überlegungen zu alternativen Validierungsmethoden neben dem Beweis gehen zurück auf Heintz (2000), S. 209–218.

9 Vgl. Brown (1999), S. 159: „So, the problem is now: What are the characteristics of mathematical evidence (other than proof)? What role does the computation of instances play? What other types of evidence besides computation could there be? What makes a mathematical conjecture a good one? What sorts of grounds could there be for accepting it? Most topics in the philosophy of mathematics have a well-developed literature that serves as a point of departure for future reflection. But not here. Writings on this subject are sparse and quite underdeveloped."

scheinen aber ebenfalls keinen Aufschluss über die Beschaffenheit von Ω geben zu können. Bevor auf den induktiven Fall eingegangen wird, soll dies zunächst für den Fall der wesentlich computergestützten Beweise gezeigt werden. Bei Letzteren handelt es sich um Beweise, die aufgrund ihrer Länge oder der Anzahl der zu unterscheidenden Fälle von Mathematikern nicht durchgeführt werden können. Nach Tymoczko (1979) wird mit solchen Beweisen mathematisches Neuland betreten. Dies zeigt sich etwa darin, dass die entsprechenden Beweise *quasi-empirisch* sind, insofern als die Rechtfertigung des bewiesenen Satzes auf empirische Faktoren baut (etwa die Zuverlässigkeit von Hard- und Software und gegebenenfalls die korrekte Eingabe von Daten). Damit können solche Beweise auch nicht mehr als *a priori* gelten. Als weitere Charakteristika computergestützter Beweise führt Tymoczko an, dass sie zudem nicht sicher, nicht überschaubar und auch nicht durch andere Mathematiker im herkömmlichen Sinne nachprüfbar seien. Insbesondere durch den Verlust an *Apriorizität* und Sicherheit bzw. Gewissheit rückt die Mathematik mit solchen Beweisen Tymoczko zufolge näher an die empirischen Wissenschaften. Für die Belange der vorliegenden Arbeit ist aber hauptsächlich von Bedeutung, dass auch eine derartige Ausweitung zulässiger Beweismethoden bei der Erkundung der Beschaffenheit von Ω nicht weiterhilft. Mit den erwähnten computergestützten Beweisen ist es ‚lediglich' möglich, Beweise zu führen, die zu umfangreich sind, als dass ein Mathematiker sie führen könnte. Wie das Ω-Theorem aber zeigt, sind unendlich viele Behauptungen über die Beschaffenheit von Ω unentscheidbar (unabhängig davon, welches überschaubare Axiomensystem zugrunde gelegt wird). Das aber heißt, dass die entsprechenden Behauptungen mit keinem noch so langen Beweis bewiesen werden können. Ein methodologischer Fortschritt der obigen Art, der uns erlaubt, längere Beweise zu führen, als es ohne Computerunterstützung menschenmöglich ist, hilft somit bei der Erkundung von Ω nicht weiter. Auf diese Weise ist also nicht zu erwarten, dass die von Chaitin aufgezeigte erkenntnistheoretische Barriere überwunden werden kann.

Die zweite im Zusammenhang mit quasi-empirischen Methoden oft diskutierte Methode besteht im induktiven Akzeptieren allgemeiner Behauptungen aufgrund einer großen Zahl bestätigter Instanzen der besagten Behauptung. Hier ist die Vorgehensweise *experimenteller* und somit ebenfalls quasi-empirischer Natur. Man sammelt Evidenz für eine allgemeine Behauptung (wie etwa im Falle der Fermatschen Vermutung), indem man ‚experimentell' eine große Anzahl von Instanzen der allgemeinen Behauptung berechnet. Fraglich ist allerdings, wie tragfähig solche Evidenz ist. Recht unumstritten kommt das experimentelle Vorgehen im *Entdeckungsprozess* mathematischer Resultate zum Einsatz. Wesentlich umstrittener ist demgegenüber die Frage der Einsetzbarkeit des Verfahrens im *Rechtfertigungsprozess* der besagten Resultate. Im Kontext dieser Frage ist zu vermuten, dass das Verfahren deutlich weniger Anhänger findet als die soeben besprochenen computergestützten Beweise. Ein pragmatisches Argument für den Einsatz solcher induktiver Methoden im Rechtfertigungsprozess könnte von Kosten-Nutzen-Erwägungen ausgehen, wie sie von Doron Zeilberger vorgebracht wurden:[10]

> We would be unable or unwilling to pay for finding such proofs, since 'almost certainty' can be bought so much cheaper. […] As absolute truths becomes more and more expensive, we would sooner or later come to grips with the fact that few non-trivial

10 Ergänzend zum obigen *pragmatischen* Argument führt Heintz (2000), S. 212–213, auch noch eine als *theoretisch* bezeichnete Argumentation an, die in Chaitins Argument für quasi-empirische Methoden besteht. Wie in Bromand (200?), Kap. IV, § 2.3, gezeigt wird, ist dieser Argumentationsansatz allerdings nicht besonders vielversprechend.

> results could be known with old-fashioned certainty. Most likely we will wind up abandoning the task of keeping track of price altogether and complete the metamorphosis to nonrigorous mathematics. (Zeilberger 1993, S. 980–981)

Heintz diskutiert im Zusammenhang mit induktiven Methoden die Fermatsche Vermutung, für die es bereits vor dem Beweis von Andrew Wiles starke induktive Evidenz gab: „Weshalb soll man Dezennien von Menschenjahren investieren, um einen an sich trivialen Satz wie die Fermatsche Vermutung zu beweisen, von dem man doch mit fast hundertprozentiger Sicherheit annehmen kann, dass er richtig ist?“ (Heintz 2000, S. 210)[11] Tatsächlich war die Fermatsche Vermutung, der zufolge die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ keine positiven ganzzahligen Lösungen für x, y, z besitzt, falls n eine natürliche Zahl mit $n > 2$ ist, bereits für Werte von n bis zu vier Millionen bewiesen.[12] Wie erwähnt ist aber mehr als unwahrscheinlich, dass sich solche induktiven Methoden im Rahmen des Rechtfertigungsprozesses etablieren können, auch wenn sie eine wichtige Rolle im Entdeckungsprozess mathematischer Resultate spielen. In diesem Sinne können solche induktiven Methoden nach Brown (1999), Kap. 10, zu rational begründeten Vermutungen führen. So stellt etwa Goldbachs Vermutung, der zufolge jede gerade Zahl größer als 2 die Summe zweier Primzahlen ist und die für eine extrem große Anzahl von Zahlen bereits gezeigt werden konnte, eine solche rational begründete Vermutung dar. Natürlich reicht eine große Zahl bestätigter Instanzen einer allgemeinen Behauptung nicht hin, um Wissen und somit die Wahrheit der fraglichen Behauptung zu garantieren. Ein Beleg dafür stellt etwa die Vermutung von Mertens dar.[13] Bei dieser handelt es sich um eine Behauptung über natürliche Zahlen, die auf Franz Mertens, einen Zeitgenossen Riemanns, zurückgeht. Die Mertens'sche Behauptung wäre dabei, wenn sie sich als wahr herausgestellt hätte, auch Beleg für die berühmte Hypothese Riemanns gewesen. Mertens konnte 1897 zeigen, dass seine Behauptung für alle Zahlen kleiner als 10.000 gilt. Darüber hinaus konnte gezeigt werden, dass es keine Gegenbeispiele für Mertens' Behauptung gibt, die kleiner als 10^{13} sind. Dennoch konnten Odlyzko und te Riele 1985 beweisen, dass die Mertens'sche Behauptung falsch ist. Selbst induktive Evidenz von einem derart gewaltigen Umfang kann demnach also äußerst irreführend und wenig zuverlässig sein, so dass es eher unwahrscheinlich ist, dass mathematisches Wissen ausschließlich auf solchen induktiven Methoden beruhen kann. Brown (1999), S. 163, interpretiert dies als Zeichen dafür, dass der Einsatz induktiver Methoden in der Mathematik grundsätzlich problematischer sei als in den Naturwissenschaften.[14] Es ist aber im vorliegenden Fall auch gar nicht erforderlich, die Einsetzbarkeit induktiver Methoden im mathematischen Rechtfertigungsprozess abschließend beurteilen zu können. Dies ist darin begründet, dass es sich bei den Behauptungen über die Beschaffenheit der Dezimalstellen von Ω um singuläre Aussagen handelt und nicht um universelle, für die man induktiv Evidenz dadurch erhält, dass man deren Instanzen berechnet. Keine der beiden besprochenen quasi-empirischen Methoden scheint somit dabei helfen zu können, die Beschaffenheit von Ω zu ergründen.

11 Die Wendung „an sich trivial“ bezieht sich hier natürlich nicht auf die Beweisführung, sondern auf die eher periphäre Bedeutung des Theorems beim Beweis anderer Behauptungen.

12 Siehe Singh (1997), S. 191.

13 Siehe zur Mertens'schen Behauptung auch Horgan (1993). Einen ähnlich gelagerten Fall diskutiert Brown (1999), S. 162.

14 Brown versucht dies durch Prinzipien wie dem der Gleichförmigkeit der Natur (*uniformity of nature*), vor allem aber durch ein *Spärlichkeitsprinzip* (*sparsity of nature*) zu erklären: Induktive Schlussfolgerungen sind nicht logisch gültig, so dass es möglich ist, dass die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist. In der Natur seien aber im Gegensatz zur Mathematik nicht alle logischen Möglichkeiten realisiert. Somit ist zu erwarten, dass das induktive Vorgehen im empirischen Falle weniger häufig fehlgeht als im Falle der Mathematik.

Die zweite vieldiskutierte Gruppe von Anwärtern auf die Position alternativer mathematischer Rechtfertigungsverfahren neben dem Beweis bilden die visuellen Methoden. Einige Mathematiker und Philosophen der Mathematik—wenn auch nur eine kleine Minderheit—sehen in diesen nicht nur heuristische bzw. pädagogische Mittel zur Veranschaulichung von zu beweisenden Resultaten, sondern wollen auch bestimmte Grafiken als Beweise im strengen Sinne zulassen:

> We claim that visual forms of representation can be important, not just as heuristic and pedagogic tools, but as legitimate elements of mathematical proofs. (Barwise & Etchemendy 1991, S. 9)

> [T]he prevailing attitude is that pictures are really no more than heuristic devices; they are psychologically suggestive and pedagogically important—but they *prove* nothing. I want to oppose this view and to make a case for pictures having a legitimate role to play as evidence and justification—a role well beyond the heuristic. In short, pictures can prove theorems. (Brown 1999, S. 25)[15]

Im Zentrum dieser Debatte stehen bislang allerdings grafische ‚Beweise' von Ergebnissen (wie etwa durch Venn-Diagramme), die auch mit traditionellen Mitteln nachgewiesen werden können.[16] Eine genaue Charakterisierung der Leistungsfähigkeit visueller ‚Beweise' und die Beantwortung der Frage, ob mit visuellen ‚Beweisen' womöglich sogar *mehr* bewiesen werden kann als mit traditionellen Beweisen, steht bislang allerdings noch aus. Somit können aber auch Chaitins erkenntnistheoretische Behauptungen letztlich nicht evaluiert werden. Chaitin kann demnach die Möglichkeit nicht ausschließen (und versucht es auch erst gar nicht), dass mehr über die Beschaffenheit von Ω im Zuge des mathematischen Fortschritts herausgefunden wird. Somit muss Chaitins erkenntnistheoretische Argumentation lückenhaft bleiben—die These der notwendigen Begrenztheit mathematischen Wissens kann letztlich auf diese Weise also nicht belegt werden. Für Chaitins Argument kann immerhin eine positive Zwischenbilanz gezogen werden: Die *bislang* diskutierten alternativen quasi-empirischen Beweismethoden scheinen keine Hoffnung zur Lösung der von Chaitin aufgeworfenen Frage zu geben, und ebenfalls ist *bislang* kein entsprechender visueller ‚Beweis' vorgeschlagen worden. Somit ist die von Chaitin aufgeworfene Frage zur Beschaffenheit von Ω zumindest ein aussichtsreicher Kandidat auf den Status eines unlösbaren Problems. Ein abschließender Nachweis, dass die von Chaitin aufgeworfene Frage zu den *Insolubilia* zählt, scheint aber nicht erbracht werden zu können. Chaitins Argumentation für Wissensgrenzen in der Mathematik scheitert eben an dem Problem der Unvorhersagbarkeit des wissenschaftlichen Fortschritts: So kann wie erwähnt bislang die Leistungsfähigkeit visueller Beweise nicht abgeschätzt werden. *Selbst wenn* ausgeschlossen werden könnte, dass visuelle Beweismethoden Aufschluss über die Beschaffenheit von Ω geben können, kann letztlich aber nicht ausgeschlossen werden, dass weitere mathematische Rechtfertigungsverfahren (weiter-)entwickelt werden wie etwa probabilistische Beweise (die ‚ledig-

15 Weitere Überlegungen zu visuellen Rechtfertigungsverfahren finden sich etwa bei Shin (1991), Giaquinto (1994), Hammer (1995) sowie Greaves (2002). Forderungen nach der Legitimierung visueller Methoden beim Beweis von Theoremen wurden auch schon vor den oben zitierten Autoren erhoben. So schreibt bereits Davis (1974), S. 119 ff.: „The eye 'perceives' many things about the circle which may be difficult or impossible to mimic via the analytic symbols. […] My point is not that a good figure can suggest conventional theorems. It goes beyond. A figure, together with its rule of generation, is automatically and without further ado a definition, theorem and proof of 'the perceived type'."

16 Weitere Beispiele (die nicht in Venn-Diagrammen bestehen) finden sich etwa bei Brown (1999), Kap. 3.

lich‘ zeigen, dass ihre Konklusion mit einer hohen Wahrscheinlichkeit zutrifft). Auch die Leistungsfähigkeit solcher Methoden müsste abgeschätzt werden können, um Chaitins erkenntnistheoretische Behauptung abschließend beurteilen zu können. Da die Entwicklung solcher Methoden kaum absehbar sein dürfte, steht etwa auch Brown Behauptungen wie derjenigen Chaitins, es gäbe prinzipielle Grenzen des mathematischen Wissens, skeptisch gegenüber:

> The reason for thinking there are unsolvable problems—a moral often drawn in the light of various undecidability results—is based on assuming specific tools for problem solving, such as first-order logic. But if we allow that there are tools for problem solving not yet discovered, then all pessimism is undermined. I have no grounds for thinking some clever picture will prove the continuum hypothesis—but I have no reason to deny it, either. (Brown 1999, S. 192)[17]

5. Das Realismusproblem

Chaitins erkenntnistheoretische Schlussfolgerung beruht wesentlich darauf, dass auch unentscheidbare mathematische Sätze wahr oder falsch sind. Auch wenn Chaitin in methodologischer Hinsicht mit alternativen, quasi-empirischen Methoden sympathisiert, ist er letztlich doch ein konservativer Platonist: Unentscheidbare Sätze sind wahr oder falsch, weil ihnen eine objektive (wenn auch abstrakte) Realität korrespondiert, welche die Sätze zutreffend oder nicht zutreffend beschreiben. Auf die Schwierigkeiten einer solchen Position weist insbesondere Paul Benacerraf (1973) hin, indem er die grundlegende Problematik aufzeigt, die der Erkenntnistheorie insbesondere aus realistischen ontologischen Theorien mathematischer Gegenstände erwächst. Sind mathematische Gegenstände so nämlich abstrakte Objekte außerhalb von Raum und Zeit, ist es mehr als fraglich, wie wir Kontakt zu solchen Gegenständen haben bzw. Informationen über solche Gegenstände beziehen können und wie unser mathematisches Wissen von solchen Objekten zustande kommen soll. Es liegt daher auch aus Gründen nahe, die unabhängig von Chaitins skeptischer Schlussfolgerung sind, nach Alternativen zur platonistischen Auffassung Ausschau zu halten. Insbesondere ist dabei von Interesse, ob Chaitins erkenntnistheoretische Ansprüche auch im Rahmen dieser Alternativen zur wenig plausiblen platonistischen Vorstellung zu halten sind.

Der platonistischen Auffassung zufolge stellen Axiome (eventuell partielle) Beschreibungen einer objektiven Realität dar.[18] Nach einer weit verbreiteten Alternative zu dieser Vorstellung besteht die hauptsächliche Aufgabe von Axiomen demgegenüber vielmehr darin, die Bedeutungen der in sie involvierten Ausdrücke als implizite Definitionen *festzulegen* (wie etwa des „∈“ im Falle der Mengentheorie oder der logischen Konstanten im Falle einer Axiomatisierung der Prädikatenlogik). Insofern wird im Rahmen der Axiome auch festgelegt, wann ein Prädikat auf einen bestimmten Gegenstand zutrifft. Ein unentscheidbarer Satz entspräche dieser Auffassung zufolge eher der Anwendung eines vagen Prädikats auf einen entsprechenden

17 Vgl. auch Brown (1999), S. 180: „[T]here are many different ways to establish mathematical truths. We know a handful; there may be indefinetely many more.“

18 Partiell ist eine axiomatische Beschreibung, wenn einige Fragen nicht auf der Grundlage der Axiome entschieden werden können. Das Vorhandensein eines unentscheidbaren Satzes zeigt somit, dass die zugrunde gelegten Axiome die mathematische Wirklichkeit nur unvollständig beschreiben. Diese platonistische Auffassung vertrat etwa Kurt Gödel, der sie am Beispiel von Cantors Kontinuumshypothese erläutert: „[The] undecidability [of Cantor’s conjecture; J.B.] from the axioms […] can only mean that these axioms do not contain a complete description of that reality“ (Gödel 1964, S. 476).

Grenzfall: Die bedeutungsbestimmenden Regeln (im mathematischen Fall also die Axiome) legen eben nicht fest, ob die fragliche Behauptung zutrifft oder nicht. Wie die bedeutungsbestimmenden Regeln vager Prädikate ließen somit auch die Axiome bestimmte Fragen einfach offen. *In diesem Sinne* wären auch manche axiomatisch charakterisierten mathematischen Prädikate (entgegen einer weit verbreiteten Meinung) *vage*. Sieht man Axiome von diesem Standpunkt, liegt es nahe, auch unentscheidbare Sätze entsprechend antirealistisch zu verstehen wie es etwa auch im Falle von Sätzen nahe liegt, in denen ein vages Prädikat von einem entsprechenden Grenzfall prädiziert wird. Unentscheidbare Sätze wären somit keine Behauptungen über eine objektiv gegebene Realität, die wahr oder falsch sind. Shapiro erläutert eine solche antirealistische Auffassung von mathematischen Begriffen und unentscheidbaren Sätzen am Beispiel der Kontinuumshypothese:

> What does this independence say about mathematical concepts? […] Some philosophers hold that these [independence; J.B.] results indicate that there is no fact of the matter concerning the continuum hypothesis, or the relative 'size' of the set of real numbers. The same goes for other independent propositions. These philosophers hold that there is an indeterminacy concerning mathematical *truth*, and so they are anti-realists in truth-value. (Shapiro 2000, S. 42)[19]

Fasst man Axiome im obigen antirealistischen Sinne auf, enthalten diese Informationen, die bestimmte Fragen zu klären erlauben, über andere hingegen keinen Aufschluss geben. Somit korrespondierten unentscheidbaren Sätzen Fragen, in denen die Bedeutungen der involvierten Ausdrücke durch die Axiome nicht hinreichend spezifiziert wurden, um die Fragen beantworten zu können. Ganz ähnlich scheint es sich auch mit fiktionalen Texten zu verhalten. Aus einem Satz wie „Sherlock Holmes zog die Augenbraue hoch“ folgt, dass Sherlock Holmes Augenbrauen besaß, allerdings lassen die Schriften Arthur Conan Doyles die Frage offen, *aus wie vielen* Haaren die Augenbrauen von Sherlock Holmes (zu welchem Zeitpunkt) bestanden. Ebenso wenig wie die Frage nach der Anzahl der Haare von Sherlock Holmes' Augenbrauen eine objektive Antwort besitzt, korrespondierte auch unentscheidbaren mathematischen Fragen nach dieser Vorstellung keine objektive Realität. Je nachdem, ob man axiomatische Systeme von einem realistischen oder antirealistischen Standpunkt betrachtet, variiert auch die Interpretation von Gödels Unvollständigkeitstheorem und ähnlichen Unvollständigkeitsergebnissen wie denen Chaitins:

> A truth-value anti-realist might argue that the incompleteness result confirms that at least some arithmetic propositions lack determinate truth-values, but the argument would presuppose that the only route to truth is through proof in a fixed, effective deductive system. A realist in truth-value concerning arithmetic interprets the incompleteness theorem as showing that there is no effective axiomatization whose theorems are all and only the truths of arithmetic. The result indicates that there is more to truth than provability in any given deductive system. (Shapiro 2000, S. 43)

Gemäß der antirealistischen Auffassung zeigen Unvollständigkeitsresultate wie diejenigen Chaitins demnach nicht die Grenzen der Axiomatisierbarkeit auf (aufgrund deren wir nicht alle arithmetischen Wahrheiten im Rahmen eines überschaubaren Axiomensystems erfassen

19 Shapiros Bezeichnungen „realist in truth-value“ bzw. „anti-realist in truth-value“ entsprechen dabei jeweils den gebräuchlicheren Bezeichnungen *semantischer Realist* bzw. *semantischer Antirealist*.

können). Vielmehr besitzen der antirealistischen Auffassung zufolge die unentscheidbaren Sätze keinen Wahrheitswert. Damit kann es sich bei solchen Sätzen aber auch nicht um Wahrheiten handeln, die sich jenseits der Grenzen unseres Wissens befinden. Hier offenbart sich eine weitere Schwachstelle von Chaitins Argumentation: Betrachtet man die Mathematik von einem antirealistischen Standpunkt wie dem obigen, zeigen Chaitins Ergebnisse keine Wissensgrenzen auf. Hier sollen abschließend nur zwei Positionen erwähnt werden, die aufzeigen, wie breit das Spektrum der antirealistischen Alternativen zum mathematischen Platonismus ist, in denen Chaitins erkenntnistheoretische Deutung seines Unvollständigkeitsergebnisses nicht zu halten ist. Auf der einen Seite ist hier natürlich der *Intuitionismus* zu nennen, der unter mathematischer Wahrheit etwas versteht, das sich im Spektrum zwischen prinzipieller Beweisbarkeit und dem aktualen Bewiesen-Sein bewegt.[20] Das Bivalenzprinzip, dem zufolge für jeden Satz gilt, dass er selbst oder seine Negation wahr (d.h. nun bewiesen oder zumindest beweisbar) ist, stellt somit keine Selbstverständlichkeit dar und wird von den Intuitionisten abgelehnt.[21] Chaitins Rede von nicht beweisbaren, aber dennoch wahren Sätzen ergibt jedenfalls vor diesem Hintergrund keinen Sinn—unabhängig davon, wo genau man die Wahrheit im Spektrum zwischen prinzipieller Beweisbarkeit und aktualem Bewiesen-Sein nun ansiedeln möchte. Vom intuitionistischen Standpunkt ist somit Chaitins erkenntnistheoretische Argumentation für Grenzen mathematischen Wissens nicht zu halten. Vom intuitionistischen Standpunkt ist aber nicht nur Chaitins erkenntnistheoretische *Deutung* seiner Ergebnisse fragwürdig. Vielmehr können auch die Theoreme selbst nicht mehr hergeleitet werden. So weist van Lambalgen darauf hin, dass insbesondere Chaitins erstes Unvollständigkeitstheorem wesentlich auf die Verwendung klassischer Logik (und die ihr zugrunde liegenden Annahmen) angewiesen ist und nicht etwa auf intuitionistische Systeme übertragen werden kann (van Lambalgen 1989, S. 1395).

Aufgrund seines stark devianten Charakters ist der Intuitionismus natürlich äußerst umstritten und wird auch von vielen abgelehnt, die etwa aufgrund der allgemeinen Überlegungen Benacerrafs zur Epistemologie der Mathematik zu einer antirealistischen Position neigen. Abschließend soll noch auf eine solche Position eingegangen werden, die im Gegensatz zum Intuitionismus kein Abweichen von der klassischen Logik verlangt. Vielmehr werden Unvollständigkeitsresultate wie dasjenige Chaitins lediglich anders gedeutet. Diese mittlerweile vieldiskutierte Position ist zwar *semantisch antirealistisch*, in *ontologischer* Hinsicht aber bereits als *realistisch*, sogar als *platonistisch* einzustufen. Die Position wird im Folgenden als *vielfältiger Platonismus* (engl. *plenitudinous platonism*) bezeichnet und geht zurück auf Balaguer (1995) und (1998), der diese Position auch als *Vollblut-Platonismus* (*full-blooded platonism*) bezeichnet.[22] Der vielfältige Platonismus behauptet dabei die Existenz nicht nur eines mathematischen Universums (wie der traditionelle mathematische Platonismus), sondern die Existenz *jedes logisch möglichen* mathematischen Universums (das in konsistenter Weise beschrieben werden kann). Jede konsistente mathematische Theorie beschriebe somit eine Region des mathematischen Universums. Beispielsweise existierte somit nicht nur ein mengentheoretisches Universum, in dem die (unentscheidbare) Kontinuumshypothese entweder wahr oder falsch ist, sondern eine

20 Vgl. zu den verschiedenen Wahrheitsauffassungen im Intuitionismus Raatikainen (2004).

21 Zumeist wenden sich die Intuitionisten explizit gegen das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten, das jedoch (unter bestimmten, von den Intuitionisten geteilten Voraussetzungen) äquivalent zum Bivalenzprinzip ist. Vgl. hierzu etwa Raatikainen (2004), Fn. 1.

22 Weitere Diskussionen dieser Position finden sich etwa bei Field (1998a) und (1998b) sowie bei Maddy (1998), welche die Position als *plentiful platonism* bezeichnet, und bei Shapiro (2000), S. 252–256.

Vielzahl mengentheoretischer Universen, die sich insbesondere hinsichtlich der Mächtigkeit des Kontinuums unterschieden. Analog korrespondierten dem vielfältigen Platonismus zufolge sowohl der euklidischen wie auch den nicht-euklidischen Geometrien entsprechende Gegenstandsbereiche, die in friedlicher Koexistenz existierten. Dem traditionellen Platonismus zufolge beschriebe demgegenüber nur eine Geometrie den ihr korrespondierenden Gegenstandsbereich korrekt, während die mit ihr inkompatiblen Geometrien zu bloßen theoretischen Spielereien degradiert würden. Dem vielfältigen Platonismus zufolge existieren demnach alle logisch möglichen mathematischen Objekte. Diese Formulierungen erinnern an die Position des Formalismus, dessen Vorstellung von Existenz David Hilbert in einem Brief an Frege vom 29. Dezember 1899 wie folgt expliziert:

> Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definirten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz. (Hilbert an Frege, in: Frege 1976, S. 66)

Eine ganz ähnliche Formulierung findet sich später auch bei Poincaré: „[I]n der Mathematik kann das Wort: ‚existieren' nur einen Sinn haben: es bedeutet ‚widerspruchslos sein'." (Poincaré 1908, S. 137) Insbesondere die zuletzt zitierte Passage Poincarés legt nahe, dass es bei diesen Feststellungen eher um eine *intensionale* Erläuterung des Ausdrucks *existiert* gehen soll; von einem mathematischen Gegenstand zu behaupten, dass er existiert, besagt demnach *per definitionem* nicht mehr und nicht weniger, als dass er im Rahmen einer konsistenten Theorie beschrieben werden kann. Auf eine darüber hinausgehende philosophisch-substantielle Klärung des Existenzbegriffs scheinen beide Autoren mithin verzichten zu wollen. Im Rahmen des vielfältigen Platonismus wird demgegenüber ein Verständnis von Existenz in einem abstrakten, nicht raum-zeitlichen Sinne bereits vorausgesetzt und lediglich die Koextensionalität (und nicht wie im Falle Hilberts und Poincarés die Synonymie) von Existenz und konsistenter Beschreibbarkeit behauptet. Ausgehend von dieser Beziehung will der Vertreter des vielfältigen Platonismus die von Benacerraf aufgeworfene Frage beantworten, wie wir Wissen um abstrakte Gegenstände haben können, obwohl wir zu solchen Objekten prinzipiell nicht in Kontakt treten können und dementsprechend kein diesbezüglicher Informationsfluss stattfinden kann. Dem vielfältigen Platonismus zufolge müssen wir nämlich lediglich um die Konsistenz einer bestimmten Aussagenmenge wissen, um zugleich zu wissen, dass die besagte Aussagenmenge einen bestimmten Bereich des mathematischen Universums wahrheitsgemäß beschreibt. Ein Kontakt zu den beschriebenen abstrakten Objekten—etwa kausaler Art—ist demnach nicht erforderlich, um Wissen von solchen Objekten haben zu können.[23]

Für die Belange der vorliegenden Untersuchung von vorrangigem Interesse ist jedoch die Frage, welchen epistemologischen Status unentscheidbare Sätze für den vielfältigen Platonisten besitzen. Hier unterscheidet sich dessen Position ebenfalls deutlich von der des klassischen Platonismus in der Philosophie der Mathematik, dem zufolge ein unentscheidbarer Satz entweder wahr oder falsch ist—je nachdem, ob er das mathematische Universum zutreffend beschreibt. Demzufolge gibt es *genau eine* richtige Antwort etwa auf die Frage nach der Mächtigkeit des Kontinuums, von der wir unter Umständen nicht wissen. Dem vielfältigen Platonismus zufolge ergibt hingegen die Rede von unentscheidbaren Sätzen, die entweder wahr oder falsch sind,

23 Vgl. etwa Shapiro (2000), S. 252–253.

keinen Sinn: Ist ein Satz S unentscheidbar im Rahmen eines axiomatischen Systems, kann sowohl der Satz S selbst als auch seine Negation widerspruchslos zu den Ausgangsaxiomen hinzugenommen werden. Dem vielfältigen Platonismus zufolge existiert dann aber sowohl ein Universum, in dem die Ausgangsaxiome mit dem fraglichen Satz S wahr sind, als auch ein Universum, in dem die Ausgangsaxiome mit der Negation von S wahr sind. Ein unentscheidbarer Satz ist demnach wahr relativ zu einem mathematischen Universum und falsch relativ zu einem anderen.[24] Für den vielfältigen Platonismus stellen die Wahrheitswerte unentscheidbarer Sätze wie derjenigen Chaitins demnach kein erkenntnistheoretisches Problem dar: Ein entsprechender Satz ist wahr in einem Universum und falsch in einem anderen.

Tatsächlich ist die Position des vielfältigen Platonisten etwas subtiler. So ist es im Rahmen des vielfältigen Platonismus durchaus möglich, von unentscheidbaren, aber dennoch objektiv *wahren* Sätzen zu sprechen, wenn man dabei die Wahrheit *in einem intendierten Modell* (also in einer bestimmten der zahlreichen Regionen des mathematischen Universums) im Auge hat (Balaguer 1998, S. 62–64). So könnte es durchaus Sinn ergeben, nach der Wahrheit der Kontinuumshypothese im von uns intendierten Modell der Mengentheorie zu fragen, wobei das intendierte Modell (bzw. der Bereich der von uns intendierten Modelle) durch die ‚Gesamtheit unserer mengentheoretischen Gedanken' bestimmt wird:

> [I]t seems very plausible to suppose that what determines whether a given open question has an objectively correct answer is whether it is independent not just of the currently accepted theory in the given area of mathematics, but also of what we *have in mind* with respect to this theory, that is, our notion of set, or our conception of the natural numbers, or whatever. (Balaguer 1998, S. 63)

Dann scheint es aber für die Fragen, wie sie von Chaitins Ω-Theorem aufgeworfen werden, keine objektiv korrekten Antworten zu geben: Diese sind nämlich wie erläutert nicht nur unentscheidbar relativ zu unserer gerade akzeptierten Theorie, sondern unentscheidbar im Rahmen aller von uns überschaubaren (d.h. rekursiv aufzählbaren) Theorien. Damit sind die von ihm aufgezeigten Fragen *wesentlich unentscheidbar* in dem Sinne, dass wir ihren Lösungen durch das Hinzuziehen weiterer Informationen nicht näher kommen (solange die resultierende Theorie rekursiv aufzählbar ist). Somit scheinen aber auch alle Zusatzinformationen, die wir im Sinn haben, nicht weiterhelfen zu können: Die besagte Unentscheidbarkeit besteht nämlich auch dann fort, wenn wir unsere Theorie um weitere Axiome ergänzen, welche die besagten Zusatzinformationen ausdrücken. Auch im Falle des vielfältigen Platonismus ergäbe es demnach—zumindest hinsichtlich der von Chaitin aufgezeigten unentscheidbaren Sätze und vergleichbarer Phänomene—keinen Sinn, von unentscheidbaren, aber dennoch objektiv korrekten Aussagen zu sprechen. Der vielfältige Platonismus führt im Falle solcher Sätze demnach zu ähnlichen erkenntnistheoretischen Konsequenzen wie eine antirealistische Position.

Wichtig ist hier, dass es sich beim vielfältigen Platonismus um eine lediglich *semantisch antirealistische*, *ontologisch* aber *realistische* Position handelt—sogar um eine platonistische Position, welche die Existenz abstrakter Objekte postuliert. Dies zeigt, dass Chaitins erkenntnistheoretisches Argument für die Begrenztheit unseres mathematischen Wissens selbst für einige Varianten des Platonismus und somit auch für einige (ontologische) Realisten nicht ak-

24 Neben diesen relativen Wahrheitsbegriffen gibt es nach dem vielfältigen Platonismus keinen absoluten Wahrheitsbegriff, da dieser Position zufolge alle mathematischen Universen gleichberechtigt nebeneinander existieren, ohne dass es (wie im klassischen Platonismus im Rahmen der Philosophie der Mathematik) ein intendiertes bzw. ‚ausgezeichnetes' Universum gäbe.

zeptabel ist. Um Chaitins erkenntnistheoretische Interpretation seiner Resultate philosophisch zu untermauern, ist es somit nicht hinreichend, sich auf eine platonistische Position zu berufen; hinreichend wäre es vielmehr, den *klassischen* Platonismus in der Philosophie der Mathematik wiederzubeleben oder eine modernisierte Variante, wie sie etwa von Kurt Gödel vertreten wurde. Unentscheidbare Sätze wie die Kontinuumshypothese sind auch Gödel zufolge entweder wahr oder falsch je nachdem, ob sie die abstrakte mathematische Wirklichkeit korrekt beschreiben: „[T]he set-theoretical concepts and theorems describe some well-determined reality, in which Cantor's conjecture must be either true or false." (Gödel 1964, S. 476) Aufgrund einer solchen Position steht man freilich vor den besagten erkenntnistheoretischen Problemen wie dem von Benacerraf aufgezeigten. Hier wäre zu klären, wie wir zu Wissen von abstrakten Objekten gelangen, ohne zu diesen in Kontakt treten zu können. Alternativ könnte ein Anhänger von Chaitins erkenntnistheoretischer Auslegung seiner Resultate auf die realistische Position Penelope Maddys (1990) zurückgreifen, die ebenfalls allen (eindeutigen) unentscheidbaren Aussagen einen zugehörigen objektiven Wahrheitswert garantieren will.[25] Während die klassischen Platonisten und Gödel erklären müssen, wie wir in das ‚jenseitige' platonische Ideenreich vordringen können, versucht Maddy, zumindest einige abstrakte mathematische Objekte im raum-zeitlichen ‚Diesseits' zu verorten, so dass wir diese mit Hilfe sinnlicher Wahrnehmung erkennen können. Gegen beide Positionen argumentiert allerdings Balaguer (1998). Ihm zufolge können wir letztlich einen Kontakt zu abstrakten Gegenständen weder durch Gödels Intuition noch durch Maddys Zugang über die Sinneswahrnehmung erklären, so dass vor dem Hintergrund dieser Positionen unsere mathematische Erkenntnis zu einem Mysterium wird. Stattdessen schlägt Balaguer vor, auf eine Theorie zurückzugreifen, die unser Wissen um mathematische Gegenstände *ohne* einen Kontakt zu solchen Gegenständen erklärt. Dabei argumentiert Balaguer allerdings dafür, dass der vielfältige Platonismus die *einzige* erfolgversprechende derartige Position darstellt und etwa auch Quines Position scheitert, der ebenfalls unser mathematisches Wissen ohne Kontakt zu mathematischen Objekten klären möchte. Der vielfältige Platonismus ist Balaguer zufolge darüber hinaus der einzige gangbare ontologisch realistische Weg.[26] Sollte der vielfältige Platonismus sich aber tatsächlich als die einzig gangbare Variante eines mathematischen Platonismus erweisen, wäre aus den besagten Gründen aber Chaitins erkenntnistheoretische Deutung seiner Unvollständigkeitstheoreme nicht zu halten.

6. Literatur

Balaguer, Mark

(1995) „A Platonist Epistemology", *Synthese* 103, S. 303–325.

(1998) *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

Barwise, Jon & Etchemendy, John

(1991) „Visual Information and valid Reasoning", in: Zimmermann & Cunningham (1991), S. 9–24.

Benacerraf, Paul

(1973) „Mathematical Truth", *The Journal of Philosophy* 70, S. 661–680. Wiederabgedruckt in: Benacerraf & Putnam (1983), S. 403–420.

25 Siehe etwa Maddy (1990), Kap. 4, § 5. Vgl. auch Shapiro (2000), S. 224.

26 Zu einigen zumindest scheinbar problematischen Aspekten des vielfältigen Platonismus siehe Bromand (200?), Kap. iv, § 8, sowie Field (1998b).

Benacerraf, Paul & Putnam, Hilary (Hrsg.)
(1983) *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*, 2. Aufl., Cambridge: Cambridge University Press.

Bromand, Joachim
(200?) *Grenzen des Wissens*, Paderborn: Mentis (voraussichtlich) 2009.

Brown, James Robert
(1999) *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*, London & New York: Routledge.

Calude, Cristian
(1994) *Information and Randomness. An Algorithmic Perspective*, Berlin & Heidelberg u. a.: Springer.

Chaitin, Gregory J.
(1987) *Algorithmic Information Theory*, Cambridge: Cambridge University Press.

Dales, Harold Garth & Oliveri, Gianluigi (Hrsg.)
(1998) *Truth in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

Davis, Martin (Hrsg.)
(1965) *The Undecidable*, New York: Raven Press.

Davis, Philip J.
(1974) „Visual Geometry, Computer Graphics, and Theorems of the perceived Type“, in: *The Influence of Computing on Mathematical Research and Education*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics 20, Providence, S. 113–127.

Devlin, Keith
(1993) „The Death of Proof“, *Notices of the American Mathematical Society* 40, 12, S. 1352.

Field, Hartry
(1998a) „Mathematical Objectivity and Mathematical Objects“, in: Laurence & Macdonald (1998), S. 387–403. Wiederabgedruckt in: Field (2001), S. 315–331.
(1998b) „Which Undecidable Mathematical Sentences Have Determinate Truth Values?“, Dales & Oliveri (1998), S. 291–310. Um ein Nachwort erweitert wiederabgedruckt in: Field (2001), S. 332–360.
(2001) *Truth and the Absence of Fact*, Oxford & New York: Oxford University Press.

Franzén, Torkel
(2005) *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to its Use and Abuse*, Wellesley (MA): A K Peters.

Frege, Gottlob
(1976) *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, hrsg., bearb., eingel & mit Anmerkungen versehen v. G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel & A. Veraart, Hamburg: Felix Meiner.

Giaquinto, Marcus
(1994) „Epistemology of Visual Thinking in Elementary Real Analysis“, *British Journal for the Philosophy of Science* 45, S. 789–813.

Gödel, Kurt
(1964) „What is Cantor's Continuum Problem?“, in: Benacerraf & Putnam (1983), S. 470–485.

Greaves, Mark
(2002) *The Philosophical Status of Diagrams*, Stanford: CSLI-Publications.

Hammer, E.
(1995) *Logic and Visual Information*, Stanford: CSLI-Publications.

Heintz, Bettina
(2000) *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*, Wien & New York: Springer.

Horgan, John
(1993) „The Death of Proof“, *Scientific American* 10, S. 74–82.

Laurence, Stephen & Macdonald, Cynthia (Hrsg.)
(1998) *Contemporary Readings in the Foundations of Metaphysics*, Oxford: Blackwell.

LI, Ming & VITANYI, Paul
(1997) *An Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications*, 2. Aufl., New York: Springer.

MADDY, Penelope
(1990) *Realism in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.
(1998) „How to be a Naturalist about Mathematics", in: Dales & Oliveri (1998), S. 161–180.

POINCARÉ, Henri
(1908) *Science et méthode*, Paris: Flammarion. Zitiert nach der deutschen Übersetzung: Ders., *Wissenschaft und Methode*, hrsg. v. F. & L. Lindemann, Leipzig & Berlin: B. G. Teubner 1914.

RAATIKAINEN, Panu
(2001) Review of Gregory Chaitin, „Exploring Randomness" & „The Unknowable", *Notices of the AMS* 48, S. 992–996.
(2004) „Conceptions of Truth in Intuitionism", *History and Philosophy of Logic* 25, S. 131–145.

RESAG, Jörg
(200?) *Die Grenzen der Berechenbarkeit. Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik*, vorläufige Fassung liegt als Internet-Publikation vor unter: *www.joergresag.privat.t-online.de/mybk3htm/start3.htm*.

SHAPIRO, Stewart
(2000) *Thinking about Mathematics*, Oxford: Oxford University Press.

SHIN, Sun Joo
(1994) *The Logical Status of Diagrams*, Cambridge: Cambridge University Press.

SINGH, Simon
(1997) *Fermat's Last Theorem*, London: Fourth Estate. Zitiert nach der deutschen Übersetzung: Ders., *Fermats letzter Satz*, München: dtv 2000.

TURING, Alan M.
(1936) „On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society* 42 (1936–7), ser. 2, S. 230–65. Wiederabgedruckt in Davis (1965), S. 116–154.

TYMOCZKO, Thomas
(1979) „The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance", *The Journal of Philosophy* 76, S. 57–83. Wiederabgedruckt in Tymoczko (1998), S. 243–266.

TYMOCZKO, Thomas (Hrsg.)
(1998) *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, revised & expanded Ed., Princeton: Princeton University Press.

VAN LAMBALGEN, Michiel
(1989) „Algorithmic Information Theory", *The Journal of Symbolic Logic* 54, S. 1389–1400.

ZEILBERGER, Doron
(1993) „Theorems for a Price: Tomorrow's Semi-Rigorous Mathematical Culture", *Notices of the American Mathematical Society* 40, 8, S. 978–981.

ZIMMERMANN, Walter & CUNNINGHAM, Steve (Hrsg.)
(1991) *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America (MAA) Notes 19.