Gibt es Grenzen des mathematischen Wissens?

JOACHIM BROMAND

Institut für Philosophie
Universität Bonn
Am Hof 1
D-53113 Bonn
bromand@uni-bonn.de

Einleitung
Im Vortrag geht es um die Anwendung von Ergebnissen der algorithmischen Informationstheorie auf erkenntnistheoretische Fragen. Dabei werden die Resultate G. Chaitins und deren Konsequenzen für die Erkenntnistheorie im Mittelpunkt stehen. Chaitin präzisierte wie auch Kolmogorov die Begriffe von *Komplexität* und *Zufälligkeit*, wodurch sie die algorithmische Informationstheorie begründeten. Chaitin bewies zudem limitative Theoreme, die vergleichbar mit Gödels Resultaten die Unvollständigkeit bestimmter formaler Systeme zeigen. Äußerst kontrovers werden die philosophischen Konsequenzen diskutiert, die Chaitin aus seinen Ergebnissen zieht. Zu diesen Schlussfolgerungen zählen etwa die Thesen, dass es Zufälligkeiten bereits in der Arithmetik gibt, dass Mathematik eine quasi-empirische Wissenschaft ist und dass unser mathematisches Wissen notwendigerweise begrenzt ist. Im Vortrag soll es um die letzte dieser Behauptungen gehen, mit der Chaitin Hilberts berühmtem Diktum widerspricht, dem zufolge es „in der Mathematik […] kein Ignorabimus" gibt.

Chaitins Ω-Theorem
Das Unvollständigkeitsresultat Chaitins, das die Grundlage für seine erkenntnistheoretischen Schlussfolgerungen bildet, baut auf eine von Chaitin als „Ω" bezeichnete reelle Zahl. Die Grundidee bei der Definition ist, unter „Ω" die Haltewahrscheinlichkeit einer universellen Turing-Maschine zu verstehen. Im Folgenden wird ein universeller Computer U zugrunde gelegt, der nur binäre präfixfreie(!) Programme akzeptiert. „$|p|$" bezeichne die Länge eines Programms p. Die sog. *Haltewahrscheinlichkeit* von U kann nun definiert werden als:

$$\Omega = \sum_{U(p)\,\textit{hält}} 2^{-|p|}$$

Dem liegt die Intuition zugrunde, dass Ω die Wahrscheinlichkeit ist, dass U hält, wenn ihr Programm p durch eine Folge von Münzwürfen generiert wurde.

Was hinsichtlich Ω gezeigt werden kann, ist, dass Ω eine reelle Zahl ist, so dass $0 < \Omega < 1$ gilt. Für die Belange des Vortrags ist hinsichtlich Ω von zentralem Interesse, dass die Folge der Kommastellen von Ω eine nicht komprimierbare, im Sinne der *program-size complexity* also eine unendliche zufällige Folge bildet (Li & Vitányi 1997, 218). Ausgehend von dieser Tatsache kann das besagte Unvollständigkeitstheorem Chaitins bewiesen werden (im Folgenden kurz: Ω-*Theorem*). Chaitins Ω-Theorem besagt dabei, dass die Anzahl der Kommastellen von Ω, die wir im Rahmen einer jeden rekursiv axiomatisierbaren formalen Theorie T bestimmen können, endlich ist (Chaitin 1987, 150–1). Ist also n hinreichend groß, kann ausgehend von der fraglichen Theorie T kein wahrer Satz der Form *„die n-te Dezimalstelle von Ω ist m“* bewiesen werden. Unendlich viele Sätze von dieser Form werden im Rahmen von T unentscheidbar, und T selbst wird somit unvollständig sein. Chaitin nimmt dieses Resultat als Anlass zu behaupten, mit der Beschaffenheit von Ω ein mathematisches Problem gefunden zu haben, das sich unseren Erkenntnisbemühungen beständig entzieht: „These questions are completely beyond the power of human reasoning. Mathematics cannot deal with them.“ (Chaitin 1987, 163)

Ausblick

Der Versuch, Wissensgrenzen nachzuweisen, steht vor zwei zentralen Schwierigkeiten: *Zum einen* scheint man ausschließen zu müssen, dass die besagten Fragen nicht doch noch im Zuge weiteren wissenschaftlichen Fortschritts beantwortet werden können. *Zum anderen* ist zu zeigen, dass es sich bei den (*Ja/Nein-*)Fragen, die dem fraglichen Ansatz zufolge nicht beantwortet werden können, um Tatsachenfragen handelt bzw. dass es überhaupt eine wahre Antwort auf die besagten Fragen gibt. Das erste Problem kann dabei als *Problem der Unvorhersagbarkeit des wissenschaftlichen Fortschritts*, das zweite als das *Realismus-* bzw. *Bivalenzproblem* bezeichnet werden. Im Vortrag soll Chaitins Behauptung mit diesen beiden Problemen konfrontiert werden. Für den speziellen Fall des Fortschritts in der Mathematik sind dabei zwei Formen zu unterscheiden. Die eine Form soll als *inhaltlicher Fortschritt* bezeichnet werden, die zweite als *methodologischer Fortschritt*. Beim inhaltlichen Fortschritt geht es um die Erweiterung der anerkannten Axiome und somit um die Erweiterung unserer Möglichkeiten, eine mathematische Behauptung auf ‚klassische‘ Weise durch einen Beweis zu rechtfertigen. Mit methodologischem Fortschritt ist dagegen eine *Ausweitung der anerkannten Rechtfertigungsverfahren* über die Methode des Beweises hinaus gemeint. Während im Falle des *inhaltlichen Fortschritts* gezeigt werden kann, dass er nicht zu einer Beantwortung der von Chaitin aufgeworfenen Fragen führen kann, ist die Lage im Falle des *methodologischen Fortschritts* nicht so klar. Hier werden augenblicklich insbesondere zwei alternative Rechtfertigungsverfahren diskutiert, nämlich zum Ersten sog. *quasi-empirische* Methoden. Zum Zweiten wird die Rechtfertigungskraft visueller Rechtfertigungsverfahren erörtert. Zumindest *für die gegenwärtig diskutierten* alternativen Rechtfertigungsstrategien kann dabei gezeigt werden, dass sie keine Aussicht auf eine erfolgreiche Beantwortung der von Chaitin aufgeworfenen Fragen versprechen (was freilich nichts über zukünftige, bislang unbekannte Rechtfertigungsverfahren aussagt).

Im Falle des Bivalenzproblems ist eine solche salomonische Antwort allerdings nicht zu erwarten: So soll auch gezeigt werden, dass Chaitin durch seine erkenntnistheoretische These auf eine extrem konservative platonistische Ontologie verpflichtet ist, die uns—wie Paul Benacerraf (1973) deutlich gemacht hat—vor nahezu unüberwindliche erkenntnistheoretische Probleme stellt. Vertritt man eine erkenntnistheoretisch moderatere Form des Platonismus wie den sog. *plenitudinous platonism*, der etwa von Mark Balaguer (1995 & 1998) vertreten wird, sind Chaitins erkenntnistheoretische Thesen bereits nicht mehr zu halten.