Sektion: Angewandte Logik und Informatik

Regeln für das subatomare Schließen

Bartosz Więckowski (Rostock)

Die beweistheoretische Semantik (in der Dummett-Prawitz'schen Tradition) ist in ihrer gegenwärtigen Gestalt eine Semantik für die logischen Aussagenverknüpfungen. Danach wird die Bedeutung einer Aussagenverknüpfung mit Hilfe der Einführungsregeln angegeben, die ihr im Kalkül des Natürlichen Schließens zugewiesen sind. Die Beseitigungsregeln für eine Aussagenverknüpfung werden dann mit Hilfe von Reduktionsverfahren gewissermaßen als Umkehrungen der Einführungsregeln gerechtfertigt (vgl. Prawitz [1]). Es ist jedoch nicht klar, wie eine beweistheoretische Erklärung der Semantik atomarer Sätze und der Terme, aus denen sie sich zusammensetzen, aussehen könnte. In meinem Vortrag möchte ich einen Vorschlag dazu machen, der auf der Einbeziehung einfacher Regeln für die Einführung und Beseitigung atomarer Sätze basiert.

Zum Zwecke der Präsentation dieser Regeln nehmen wir zunächst an, dass eine Sprache $\mathcal{L}$ für die Prädikatenlogik erster Stufe (mit Konstanten) in der üblichen Weise formuliert worden ist. Ferner nehmen wir an, dass Atm die Menge der atomaren Sätze von $\mathcal{L}$ ist und definieren die Mengen $Atm(\alpha)$ und $Atm(\varphi^n)$ wie folgt: Für jede Konstante α, $Atm(\alpha) = \{A \in Atm\colon A$ enthält mindestens ein Vorkommen der Konstante $\alpha\}$; und für jedes elementare Prädikat φ^n, $Atm(\varphi^n) = \{A \in Atm\colon A$ enthält ein Vorkommen des Prädikats $\varphi^n\}$. Wir definieren v als Funktion, die jeder Konstante α (bzw. jedem elementaren Prädikat φ^n) eine Teilmenge von $Atm(\alpha)$ (bzw. $Atm(\varphi^n)$) zuordnet und nennen die Funktionswerte von v die Termannahmen von α (bzw. φ^n). Wir schreiben z.B. $\alpha\{\varphi^1\alpha, \chi^2\alpha\alpha, \psi^3\alpha\beta\gamma, ...\}$, um anzugeben, dass die Konstante α mit den Termannahmen $\{\varphi^1\alpha, \chi^2\alpha\alpha, \psi^3\alpha\beta\gamma, ...\}$ assoziiert ist. In ähnlicher Weise schreiben wir $\chi^2\{\chi^2\alpha\alpha, \chi^2\alpha\beta, \chi^2\gamma\alpha, ...\}$, um anzugeben, dass das zweistellige Prädikat χ^2 mit den Termannahmen $\{\chi^2\alpha\alpha, \chi^2\alpha\beta, \chi^2\gamma\alpha, ...\}$ assoziiert ist. (Intuitiv können wir Termannahmen gewissermaßen als Informationen auffassen, die ein Subjekt mit Namen und Prädikaten assoziiert.)

Wir führen nun eine Regel für die Einführung von atomaren Sätzen und eine für deren Beseitigung ein. Die Einführungsregel nimmt die folgende Gestalt an:

$$\frac{\varphi^n\{..., \varphi^n\alpha_1...\alpha_n, ...\} \qquad \begin{array}{c}\alpha_1\{..., \varphi^n\alpha_1...\alpha_n, ...\}\\ \vdots \\ \alpha_n\{..., \varphi^n\alpha_1...\alpha_n, ...\}\end{array}}{\varphi^n\alpha_1...\alpha_n}\ (at\mathrm{E})$$

Diese Regel besagt, dass ein atomarer Satz abgeleitet werden kann, wenn er im Schnitt der Annahmen für alle Terme, aus denen er zusammengesetzt ist, enthalten ist. Die Beseitigungsregel für atomare Sätze sieht wie folgt aus:

$$\frac{\varphi^n\alpha_1...\alpha_n}{\varphi^n\{\varphi^n\alpha_1...\alpha_n\} \qquad \begin{array}{c}\alpha_1\{\varphi^n\alpha_1...\alpha_n\}\\ \vdots \\ \alpha_n\{\varphi^n\alpha_1...\alpha_n\}\end{array}}\ (at\mathrm{B})$$

Nach dieser Regel wird ein atomarer Satz beseitigt, indem man zu den Annahmen für die Terme übergeht, aus denen er zusammengesetzt ist, wobei die Termannahmen Einermengen sind, die den beseitigten atomaren Satz enthalten. Im Gegensatz zu den Regeln des Natürlichen Schließens dienen subatomare Regeln gewissermaßen zur Einführung bzw. zur Beseitigung wahrer Sätze und nicht zur Wahrheitserhaltung; in diesem Sinne sind es keine logischen Regeln.

Zwei Dinge lassen sich direkt verifizieren, erstens, dass (atB) konservativ bezüglich (atE) ist und zweitens, dass sich (atE) und (atB) nicht in "Harmonie" befinden.

$$\dfrac{\varphi^n\{\ldots,\varphi^n\alpha_1\ldots\alpha_n,\ldots\} \qquad \begin{matrix}\alpha_1\{\ldots,\varphi^n\alpha_1\ldots\alpha_n,\ldots\}\\ \vdots \\ \alpha_n\{\ldots,\varphi^n\alpha_1\ldots\alpha_n,\ldots\}\end{matrix}}{\varphi^n\alpha_1\ldots\alpha_n}\;(at\mathrm{E})$$

$$\dfrac{\varphi^n\alpha_1\ldots\alpha_n}{\varphi^n\{\varphi^n\alpha_1\ldots\alpha_n\} \qquad \begin{matrix}\alpha_1\{\varphi^n\alpha_1\ldots\alpha_n\}\\ \vdots \\ \alpha_n\{\varphi^n\alpha_1\ldots\alpha_n\}\end{matrix}}\;(at\mathrm{B})$$

Die Vereinigungsmenge Γ' der Termannahmen, die in der Beseitigungsregel vorkommen, ist eine Teilmenge der Vereinigungsmenge Γ der Termannahmen, die in der Einführungsregel erscheinen. Somit ist (atB) konservativ. In Anbetracht von Fällen, in denen Γ' eine echte Teilmenge von Γ ist, sind diese Regeln jedoch nicht harmonisch.

Subatomare Schlussregeln können als Ergänzungen zu den üblichen Regeln des Natürlichen Schließens Verwendung finden. Sie sind insbesondere unter der Annahme sinnvoll, dass atomare Sätze nicht als Annahmen verwendet dürfen, sondern eigens eingeführt werden müssen. Es folgt ein einfaches Beispiel für die Wechselwirkung beider Regelsysteme in Ableitungen:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi^2\{\varphi^2\alpha\alpha,\varphi^2\alpha\beta,\varphi^2\alpha\gamma\} \qquad \begin{matrix}\alpha\{\varphi^2\alpha\beta,\varphi^2\alpha\gamma,\chi\alpha,\psi^3\alpha\beta\gamma\}\\ \beta\{\varphi^2\alpha\beta,\varphi^2\beta\alpha,\chi\beta\}\end{matrix}}{\varphi^2\alpha\beta}\,(at\mathrm{E}) \qquad \dfrac{\dfrac{(\forall x)(\forall y)(\varphi^2xy\rightarrow\chi^1x)}{(\forall y)(\varphi^2\alpha y\rightarrow\chi^1\alpha)}\,(\forall\mathrm{B})}{\varphi^2\alpha\beta\rightarrow\chi^1\alpha}\,(\forall\mathrm{B})}{\chi^1\alpha}\,(\rightarrow\mathrm{B})}{\chi^1\{\chi^1\alpha\} \qquad \alpha\{\chi^1\alpha\}}\,(at\mathrm{B})}{\dfrac{\chi^1\alpha}{(\exists z)\chi^1 z}\,(\exists\mathrm{E})}\,(at\mathrm{E})$$

Im Vortrag soll u.a. erörtert werden, (i) in welcher Weise subatomare Regeln mit den Standardregeln für das Natürliche Schließen interagieren, (ii) inwiefern sie als Alternative zu atomaren Systemen (vgl. Prawitz [2]) angesehen werden können und (iii) inwiefern mit Hilfe subatomarer Regeln die Bedeutung atomarer Sätze und ihrer Komponenten angegeben werden kann.

Literatur: [1] D. Prawitz (1965). *Natural Deduction. A Proof-theoretical Study*, Stockholm: Almquist & Wiksell. [2] D. Prawitz (1973). Towards a foundation of a general proof theory. In P. Suppes *et al.* (eds.) *Logic, Methodology, and Philosophy of Science IV*, Seiten 225-250, Amsterdam.